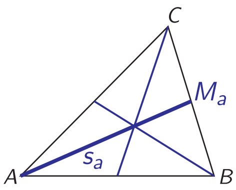
Kleine Formelsammlung Mathematik

A	α	Alpha	E	ε	Epsilon	I	ι	Iota	N	ν	Nü	P	ρ	Rho	Φ	φ	Phi
B	β	Beta	Z	ζ	Zeta	K	κ	Kappa	Ξ	ξ	Xi	Σ	σ	Sigma	X	χ	Chi
Γ	γ	Gamma	H	η	Eta	Λ	λ	Lambda	O	o	Omikron	T	τ	Tau	Ψ	ψ	Psi
Δ	δ	Delta	Θ	ϑ	Theta	M	μ	Mü	Π	π	Pi	Y	υ	Ypsilon	Ω	ω	Omega

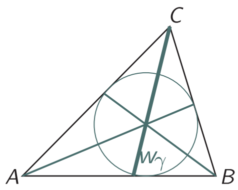
Geometrie

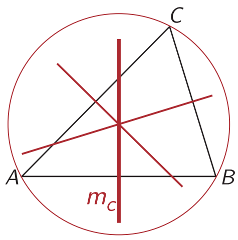
Dreiecke und Vierecke

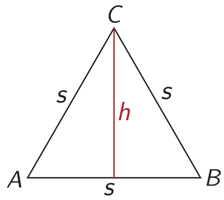
s_a, s_b, s_c: Schwerlinien / Seitenhalbierende ($\rightarrow$ Schwerpunkt),
w_α, w_β, w_γ: Winkelhalbierende ($\rightarrow$ Inkreis), m_a, m_b, m_c: Mittelsenkrechten ($\rightarrow$ Umkreis).



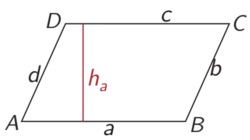
Schwerlinien/Seitenhalb.



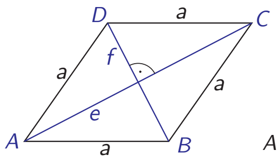




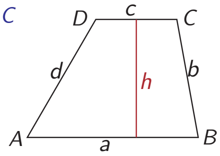
Gleichseitiges Dreieck



Parallelogramm / Rhomboid



Rhombus



Trapez

Gleichseit. Dreieck:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$$

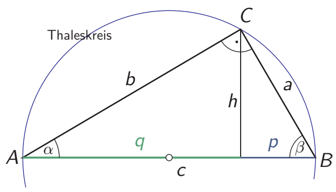
Trapezfläche:

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

Rechtwinklige Dreiecke

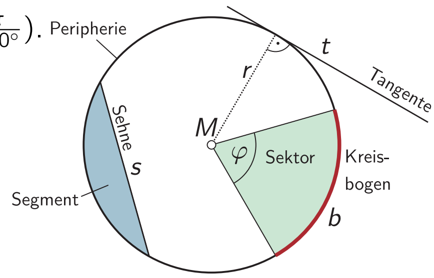
a und b sind die Katheten, c die Hypotenuse.

Satz v. Pythagoras:	$a^2 + b^2 = c^2$
Höhensatz:	$h^2 = p \cdot q$
Kathetensatz:	$a^2 = pc,\ b^2 = qc$
Fläche:	$A = \frac{1}{2} hc = \frac{1}{2} ab$



Kreis- und Kreisteile

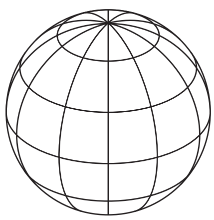
φ ist im Gradmass, $\hat{\varphi}$ im Bogenmass ($\hat{\varphi} = \varphi \cdot \frac{\pi}{180°}$).



Kreis:	$u = 2r\pi, \quad A = r^2\pi$
Bogenlänge:	$b = r \cdot \hat{\varphi} = \dfrac{2\pi r \cdot \varphi}{360°}$
Sektorfläche:	$A = \dfrac{r^2}{2} \cdot \hat{\varphi} = \dfrac{\pi r^2 \cdot \varphi}{360°}$

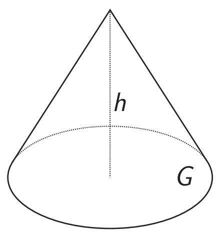
Körper

r bezeichnet den Radius, h die Höhe, G die Grund- und D die Deckfläche.



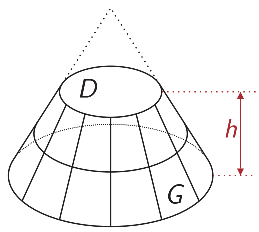
Kugel

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3, \quad S = 4\pi r^2$$



Kegel / Pyramide

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$



Kegel- / Pyramidenstumpf

$$V = \frac{1}{3}\left(G + \sqrt{GD} + D\right) \cdot h$$

Trigonometrie

Sinus und Cosinus

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}, \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c}, \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{b},$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Sinus- und Cosinussatz

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

Vektorgeometrie

Betrag

Betrag (Norm, Länge) eines Vektors: $|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Einheitsvektor

Einheitsvektor $\vec{e_v}$ in Richtung $\vec{v}$ mit Länge $|\vec{e_v}| = 1$: $\quad \vec{e_v} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}, \qquad \vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{e_v}$

Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \vec{a} \cdot \vec{b} \qquad \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Vektorprodukt

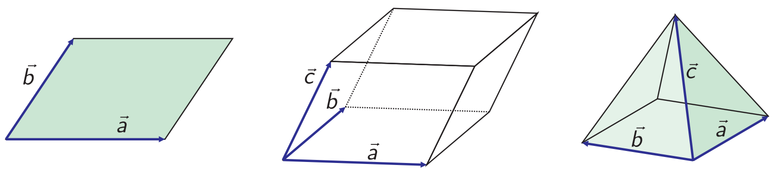
$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \qquad \vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$

Fläche und Volumen

Fläche des Parallelogramms (Vektorprod.): $A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Volumen des Spats (Spatprodukt): $V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$

Pyramide (Grundfläche ist ein Parallelogramm): $V = \frac{1}{3}\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$

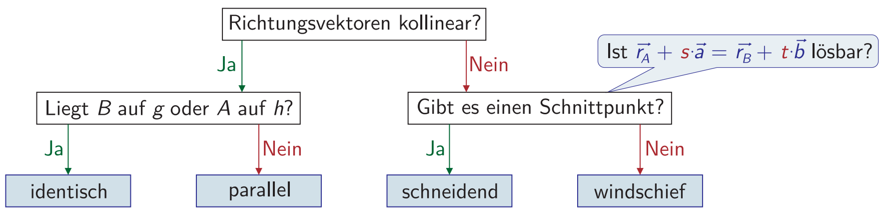


Geraden

Parametergleichung mit Stützpunkt A (Stützvektor $\overrightarrow{r_A}$) und Richtungsvektor $\vec{a}$:

$$g : \vec{r} = \overrightarrow{r_A} + s \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + s \cdot a_x \\ y_A + s \cdot a_y \\ z_A + s \cdot a_z \end{pmatrix}$$

Lage zweier Geraden $g : \vec{r} = \overrightarrow{r_A} + s \cdot \vec{a}$ und $h : \vec{r} = \overrightarrow{r_B} + t \cdot \vec{b}$ im Raum:



Ebene im Raum

Koordinatengleichung: $ax + by + cz + d = 0$, Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Hessesche Normalform HNF ($|\vec{n}| = 1$): $\quad \dfrac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$

Parametergleichung (mit Richtungsvektoren $\vec{v}, \vec{w}$): $\vec{r} = \overrightarrow{r_A} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$

Kreis und Kugel

$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2, \qquad$ Mittelpunkt M, Radius r.
Kreis-Tangente durch $P \in k$: $(x_P - x_M)(x - x_M) + (y_P - y_M)(y - y_M) = r^2$

Ellipse

$\dfrac{(x - x_M)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1, \qquad$ Exzentrizität $e^2 = a^2 - b^2$

Abstände

Für Geraden $\quad g : \vec{r} = \overrightarrow{r_A} + s \cdot \vec{u}, \quad h : \vec{r} = \overrightarrow{r_B} + s \cdot \vec{v}$,
Ebene $E : ax + by + cz + d = 0, \qquad \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \qquad \vec{e_n} = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$.

Punkt P – Punkt Q: $d = \left\lvert\overrightarrow{PQ}\right\rvert = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$	Punkt P – Gerade g: $d = \left\lvert\overrightarrow{AP} \times \vec{e_u}\right\rvert = \dfrac{\lvert\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert}$
Punkt P – Ebene E (HNF): $d = \left\lvert\dfrac{ax_P + by_P + cz_P + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right\rvert$	Windschiefe Geraden g, h: $d = \left\lvert\overrightarrow{AB} \cdot \vec{e_n}\right\rvert = \dfrac{\lvert\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}$

Stochastik

Kombinatorik

Aus einem Topf mit n Kugeln werden k Kugeln gezogen.

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
Reihenfolge beachten	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Reihenfolge egal	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ nCr

Statistik

Mittelwert $\bar{x}$, (empirische) Varianz $s_x^2 = \mathrm{Var}(x)$ und Standardabweichung s_x:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \qquad s_x = \sqrt{s_x^2}$$

Kovarianz und Korrelation

$$s_{xy} = Cov(x,y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) \qquad r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

Konfidenzintervall

$$k_\mu = c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad k_p = c \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$$

α'	0.683	0.9	0.95	0.99	0.995
c	1.000	1.645	1.960	2.576	2.81

Erwartungswert und Varianz

$$\mu = \mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \qquad \sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 p_i = \mathrm{E}[X^2] - \left(\mathrm{E}[X]\right)^2$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Binomialverteilung

$$P(X=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad \mathrm{E}[X] = np, \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

Verteilungen

Poisson: $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ Normal: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Algebra und Analysis

Potenzen und Wurzeln

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad (a^x)^y = a^{x\cdot y} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^0 = 1$$

Logarithmen

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} = \frac{\log(x)}{\log(b)} \qquad \log\left(a^c\right) = c\cdot\log(a) \qquad 10^{\log(x)} = x$$

$$\log(a\cdot b) = \log(a)+\log(b) \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a)-\log(b) \qquad e^{ln(x)} = x$$

Quadratische Gleichungen

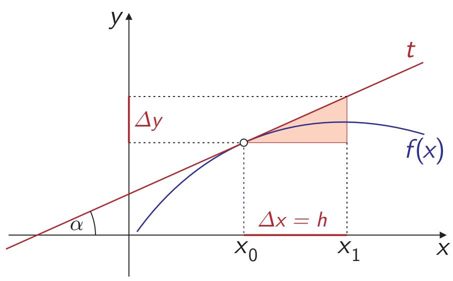
$$ax^2+bx+c=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Spezielle Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Differentialquotient

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$



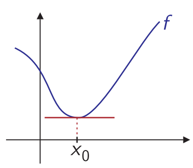
$$\tan(\alpha) = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

wobei α = Steigungswinkel

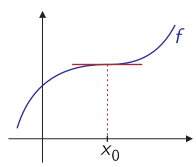
$y = f(x)$	Höhe über der x-Achse
$m = f'(x)$	(Tangenten-)Steigung
$k = f''(x)$	Krümmungsverhalten

Extremalstellen

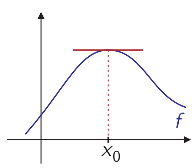
Wenn die 1. Ableitung Null ist – $f'(x_0) = 0$ –, dann gilt:



Minimum
$f''(x_0) \geq 0$



Terrassen- / Sattelpunkt
$f''(x_0) = 0, \quad f'''(x_0) \neq 0$



Maximum
$f''(x_0) \leq 0$

Summen

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+q^3+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q|<1$$

Ableitungsregeln

	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x)\cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
Quotientenregel	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
Kettenregel	$f(x) = u(v(x))$	$f'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x)$

Integrationsregeln

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \qquad \textit{(Partielle Integration)}$$

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(z)\,\mathrm{d}z, \quad z = u(x) \qquad \textit{(Substitution)}$$

Rotationsvolumen

$$V_x = \left|\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x\right| \qquad V_y = \left|\pi \cdot \int_a^b x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

Lineare Differentialgleichung

$$y' + p(x)y = q(x) \quad \Rightarrow \quad y = e^{-P}\cdot \int e^{P}\cdot q(x)\,\mathrm{d}x, \quad P = \int p(x)\,\mathrm{d}x$$

Wichtige Funktionen

Ableitung $f'(x)$	Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
$n\cdot x^{n-1}$	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$
$a^x\cdot\ln(a)$	a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$x\cdot(\ln\lvert x\rvert - 1)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$	$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x\cdot\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x\cdot\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x\cdot\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}\,\mathrm{d}x = \frac{ax}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\cdot\ln\lvert cx+d\rvert$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)(cx+d)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{ad-bc}\ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right|$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

$$\int \frac{ax^2+b}{cx^2+d}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\int \frac{1}{x^2+\frac{d}{c}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)$$

Die Stammfunktionen sind ohne Integrationskonstante angegeben.